2022

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Gymnasium NRW

Mathematik LK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2019*

Abiturprüfung 2020*

Abiturprüfung 2021

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2021 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen 2017 bis 2020 für das Abitur seit 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2021** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autorinnen und Autoren:

Georg Breitenfeld
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B5 (GTR);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021;
Download: 2017 – B5 (CAS); 2020 – B2 (GTR)

Herbert Kompernaß
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (GTR/CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 –Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021;
Download: 2017 – B1 (CAS), B2 (GTR); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS), B2 (GTR); 2020 – B1 (CAS)

Kristin Menke
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil A;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2022** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2022 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2020**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2021**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2022 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2022

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 zusammen aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule drei Sätze **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben:
  - Aufgabensatz 1: Analysis und Analytische Geometrie/Lineare Algebra sowie deren Verknüpfungen
  - Aufgabensatz 2: Analysis und Stochastik sowie deren Verknüpfungen
  - Aufgabensatz 3: Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik sowie deren Verknüpfungen

  Die **Fachlehrkraft** wählt einen Aufgabensatz aus. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.

– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet:
  - zwei Analysisaufgaben
  - eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie, eine Aufgabe zur Stochastik und eine weitere Aufgabe zur Analysis

Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet. Aus den beiden Analysisaufgaben wird **eine** ausgewählt. Aus den übrigen Aufgaben (Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie, Aufgabe zur Stochastik und weitere Aufgabe zur Analysis) werden **zwei** ausgewählt.

Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:

- GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Leistungskurs insgesamt **270 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 70 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2022

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2022** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern	2017 – Aufgabe B1 (GTR)
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil B – Analysis B2

Das seitliche Profil einer Wasserrutsche in einem Freibad kann durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = (x+1) \cdot e^{1-x}, \quad 0 \le x \le 5$[1]

modelliert werden (x und f(x) in Metern). Das Schwimmbecken wird im Bereich der Rutsche auf der linken Seite durch den negativen Teil der y-Achse begrenzt und der obere Beckenrand befindet sich auf Höhe der x-Achse. Für den Wasserspiegel der Wasseroberfläche wird angenommen, dass er 20 cm unterhalb des Beckenrandes liegt. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

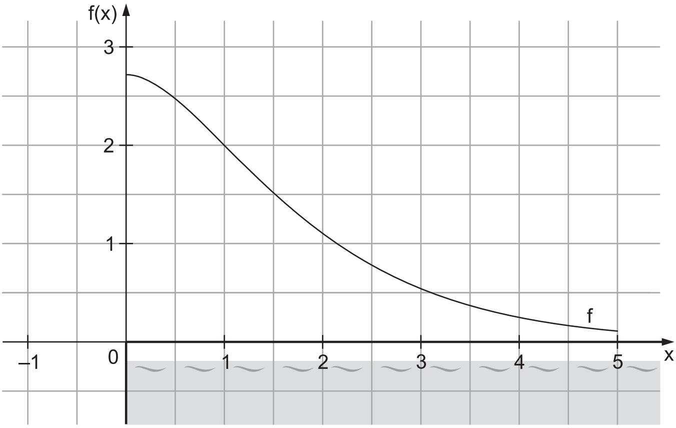


Abbildung 1

a) (1) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Wasseroberfläche das Ende der Rutsche liegt.

(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Profillinie der Rutsche auf der gesamten Länge fällt, und bestimmen Sie das durchschnittliche Gefälle der Rutsche.

(3) Bestimmen Sie durch Rechnung denjenigen Punkt auf der Profillinie der Rutsche, in dem das Gefälle am größten ist.
Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Rutsche an keiner Stelle 60° überschreiten.
Überprüfen Sie, ob die Rutsche dieser Norm gerecht wird.

1 Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \le x \le 5$ zur Modellierung verwendet.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Beachten Sie, dass der Abstand bis zur Wasseroberfläche und nicht bis zur x-Achse gesucht ist.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.

Bestimmen Sie die 1. Ableitung von f und zeigen Sie, dass $f'(x) < 0$ gilt für $0 < x < 5$.

Berechnen Sie die durchschnittliche/mittlere Steigung des Graphen der Funktion f mit der Formel $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Oder

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die durchschnittliche/mittlere Steigung grafisch mit einer Sekante durch zwei Punkte des Graphen.

(3) Das größte Gefälle der Rutsche liegt an der Minimalstelle der 1. Ableitung $f'(x)$ vor.

Überprüfen Sie als Kandidaten hierfür die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ und die Randstellen des Definitionsbereichs.

Bestimmen Sie den Winkel α, der zu dem größten Gefälle gehört, mithilfe des Tangens.

Teilaufgabe b

(1) Beachten Sie, dass beide Seiten verkleidet werden sollen und dass die Verkleidung bis zur Wasseroberfläche reichen soll.

Berechnen Sie den Inhalt einer Seitenfläche, indem Sie zum Flächeninhalt zwischen der Profillinie und der x-Achse den Flächeninhalt eines Rechtecks addieren.

Oder

Stellen Sie die Wasseroberfläche als Funktion dar und berechnen Sie den Inhalt einer Seitenfläche als Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen.

(2) Überlegen Sie, welcher Flächeninhalt durch das bestimmte Integral angegeben wird und welcher Flächeninhalt davon abgezogen wird.

Markieren Sie in der Abbildung den Flächeninhalt, der übrig bleibt.

Vergessen Sie nicht, auch die zweite Teilfläche, in die die Verkleidung zerlegt wird, einzuzeichnen.

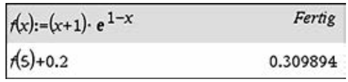
(3) Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Bilden Sie $F'(x)$ und bestimmen Sie a und b, indem Sie die Funktionsterme miteinander vergleichen.

Lösung

a) (1) Da die Wasseroberfläche 20 cm = 0,2 m unterhalb des Beckenrandes liegt, muss zum Funktionswert f(5) noch der Wert 0,2 addiert werden:
$f(5)+0{,}2 \approx 0{,}31$

GTR/CAS



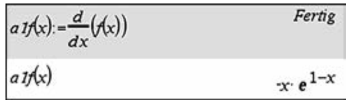
Das Ende der Rutsche liegt ca. 0,31 m (= 31 cm) über der Wasseroberfläche.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.
Dies ist der Fall, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0 < x < 5$. (Die Ränder des Definitionsbereichs können bei der Untersuchung auf Monotonie vernachlässigt werden.)

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot e^{1-x} + (x+1)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) \\ &= e^{1-x} - (x+1)\cdot e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - x\cdot e^{1-x} - e^{1-x} \\ &= -x\cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS



Für $x > 0$ gilt folgende Abschätzung:

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0}\cdot\underbrace{e^{1-x}}_{>0} < 0$$

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend für $x > 0$. Die Profillinie der Rutsche fällt daher auf der gesamten Länge.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche entspricht der mittleren Steigung des Funktionsgraphen von f im Definitionsbereich $0 \le x \le 5$.

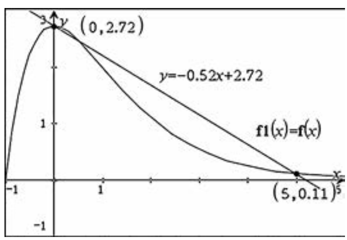
$$m = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} \approx -0{,}52$$

GTR/CAS

Alternativ:
Die mittlere Steigung m kann auch grafisch anhand der Gleichung der Sekante durch die Punkte P(0 | f(0)) und Q(5 | f(5)) ermittelt werden.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche beträgt ca. 0,52 m je Meter in horizontaler Richtung.

GTR/CAS



(3) Das Gefälle der Rutsche wird durch die 1. Ableitung $f'(x)$ beschrieben. Das größte Gefälle liegt an der Minimalstelle der Funktion $f'(x)$ vor. Dafür infrage kommen die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ oder die Randstellen des Definitionsbereichs.

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{1-x} + (-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \\ &= (x-1) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	Fertig
$a2f(x)$	$(e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$

Notwendige Bedingung für eine Minimalstelle der Funktion $f'(x)$: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot e^{1-x} &= 0 \quad &&|: e^{1-x} \neq 0 \\ x - 1 &= 0 &&|+1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung des Funktionswertes der Funktion $f'(x)$:

$f'(1) = -1$

Zu überprüfen sind noch die Randstellen:

$f'(0) = 0$

$f'(5) \approx -0,09$

GTR/CAS

$a1f(x) := -x \cdot e^{1-x}$	Fertig
$a1f(1)$	-1
$a1f(0)$	0.
$a1f(5)$	-0.091578
$f(1)$	2

Das größte Gefälle besitzt die Rutsche nach 1 Meter in horizontaler Richtung. Mit $f(1) = 2$ lauten die Koordinaten des zugehörigen Punktes $(1|2)$.

Der Winkel α, der zu diesem Gefälle gehört, berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= -1 \\ \alpha &= \tan^{-1}(-1) \\ \alpha &= -45° \end{aligned}$$

GTR/CAS

$\tan^{-1}(-1)$	-45.

Da Neigungswinkel immer zwischen 0° und 90° angegeben werden, beträgt der zugehörige Neigungswinkel 45°. Die Rutsche wird der Norm daher gerecht.

b) (1) Die zu verkleidende Fläche auf einer Seite der Rutsche setzt sich aus der Fläche zwischen der Profillinie der Rutsche und dem oberen Beckenrand (x-Achse) sowie der rechteckigen Fläche zwischen dem Beckenrand und der Wasseroberfläche im Bereich $0 \leq x \leq 5$ zusammen. Da beide Seiten der Rutsche verkleidet werden sollen, wird mit 2 multipliziert.

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0,2 \right) \approx 12,62\,[m^2]$$

GTR/CAS

$a := 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0.2 \right)$	12.6167

Abiturprüfung 2020 Mathematik Leistungskurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Punkte

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - 1),\ x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. 3

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$. 3

b) Eine Funktionenschar f_k ist gegeben durch $f_k(x) = e^{-x} - k$ für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}, k > 0$.

(1) Bestimmen Sie k so, dass $x = -1$ eine Nullstelle von f_k ist. 2

(2) Berechnen Sie das Integral $\int_0^k (e^{-x} - k)\,dx$ in Abhängigkeit von k. 4

c) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -4$ bilden die Punkte $A(0|0|-4)$, $B(3|4|-4)$, C, $D(-8|6|-4)$, E_r, F_r, $G_r(-5|10|r)$ und H_r einen Quader. In der Abbildung 1 ist ein Quader für einen konkreten Wert von r dargestellt.

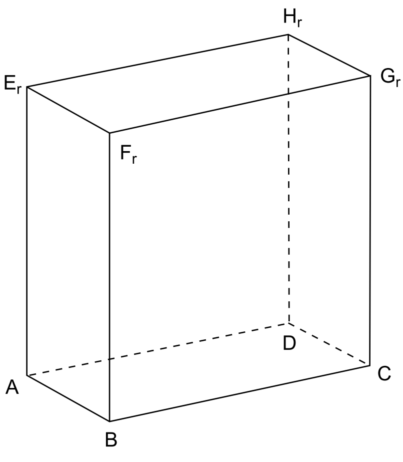


Abbildung 1

(1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander verlaufen. 2

(2) Bestimmen Sie die Werte von r, für die die Raumdiagonale $\overline{AG_r}$ die Länge 15 LE besitzt. 4

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Multiplizieren Sie den Funktionsterm aus und bestimmen Sie die 1. Ableitung.

(2) Die Steigung einer Tangente an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$ ergibt sich durch die 1. Ableitung von f an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$.

Bestimmen Sie den Punkt $S\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,y\right)$ und stellen Sie die Gleichung der Tangente auf.

Teilaufgabe b

(1) Setzen Sie den Funktionsterm für $x=-1$ gleich null und lösen Sie die Gleichung nach k auf.

(2) Ermitteln Sie mithilfe der Stammfunktion von f_k das Integral.

Teilaufgabe c

(1) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass die beiden Vektoren senkrecht zueinander verlaufen.

(2) Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AG_r}$.

Stellen Sie den Term für $\left|\overrightarrow{AG_r}\right|$ auf und setzen Sie diesen gleich 15.

Lösen Sie die Gleichung nach r auf, indem sie diese vorher quadrieren.

Beachten Sie, dass eine quadratische Gleichung bis zu zwei Lösungen besitzen kann.

Teilaufgabe d

(1) Bedenken Sie, dass es sich um eine Binomialverteilung handelt.

Ermitteln Sie anhand des Terms die Anzahl der teilnehmenden Personen, die Anzahl der Personen mit Gewinn und die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(2) Betrachten Sie die Zufallsgröße X für die Anzahl der Personen mit Gewinn.

Berechnen Sie $P(X=4)$.

(3) Erstellen Sie eine Gleichung für $P(X=0)=9\cdot P(X=2)$, indem Sie für die Gewinnwahrscheinlichkeit p als Variable einsetzen.

Lösen Sie die Gleichung nach p auf.

Lösung

a) (1) Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$f(x) = x \cdot (x^2 - 1) = x^3 - x$

Die 1. Ableitung von f lautet:

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$

Einsetzen von $x = -\frac{1}{2}$ ergibt:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

(2) Die Tangente hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$.
Der Berührungspunkt S der Tangente mit dem Graphen von f an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ wird berechnet durch:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = y$$

Damit gilt: $S\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{3}{8}\right)$

Die Steigung m der Tangente entspricht der Steigung des Graphen von f im Punkt S. Man erhält m, indem man $x = -\frac{1}{2}$ in die 1. Ableitung von f einsetzt (siehe Teilaufgabe a (1)):

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} = m$$

Setzt man die Werte für x, y und m in die Tangentengleichung ein, so erhält man:

$$\frac{3}{8} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + b \qquad \left| -\frac{1}{8} \right.$$

$$b = \frac{1}{4}$$

Die Tangentengleichung an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ lautet somit:

$$y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4}$$

b) (1) Damit $x = -1$ eine Nullstelle von f_k ist, setzt man diesen Wert in die Gleichung $f_k(x) = 0$ ein:

$$f_k(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-(-1)} - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = e$$

(2) Eine Stammfunktion von f_k ist:

$F_k(x) = -e^{-x} - k \cdot x$

So kann das Integral in Abhängigkeit von k bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\int_0^k (e^{-x} - k)\,dx &= [-e^{-x} - k \cdot x]_0^k \\ &= (-e^{-k} - k \cdot k) - (-e^0 - k \cdot 0) \\ &= -e^{-k} - k^2 + 1\end{aligned}$$

c) (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn das Skalarprodukt null ist.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0$

Die Kante $\overline{AB}$ verläuft senkrecht zur Kante $\overline{AD}$.

(2) Durch die Eckpunkte der Raumdiagonalen wird $\overrightarrow{AG_r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ r+4 \end{pmatrix}$ bestimmt.

Mithilfe des Betrags von $\overrightarrow{AG_r}$ und der Länge der Raumdiagonalen von 15 LE lässt sich eine Gleichung aufstellen:

$\left|\overrightarrow{AG_r}\right| = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + (r+4)^2} = 15$

Quadrieren der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 25 + 100 + (r+4)^2 &= 225 \\ 125 + r^2 + 8r + 16 &= 225 \\ r^2 + 8r + 16 &= 100 \\ (r+4)^2 &= 100 \\ r + 4 = 10 \ &\vee \ r + 4 = -10 \\ r = 6 \ &\vee \ r = -14 \end{aligned}$$

d) (1) Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit der Versuchsanzahl $n = 7$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele Personen einen Gewinn erhalten. Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 2)$ an.
Im Sachzusammenhang wird damit die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass von 7 teilnehmenden Personen höchstens zwei einen Gewinn erhalten.

(2) Es wird die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ gesucht, wobei X die Personen mit Gewinn beschreibt. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}1$. Damit ergibt sich:

$P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16}$